

Chapitre I
***Rappels et outils pour la commande des
systèmes chaotiques d'ordre
fractionnaire***

CHAPITRE I

Rappels et outils pour la commande des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

I.1. Introduction

Dans ce chapitre on présente l'histoire du chaos déterministe et la théorie du chaos qui applique pour la compréhension, la manipulation et l'analyse du comportement des systèmes dans divers domaines. Après s'avoir la synchronisation de deux systèmes chaotiques et la caractérisation du système chaotique, et on parlants sur les calculs fractionnaires (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire), puis quelques rappels sur la commande adaptative flou, la commande par mode glissant et des outils de stabilité (comme Lyapunov, Riccati, Nussbaum ...).

I.2. Histoire du chaos

En 1963 le météorologue *Edward Lorenz* expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés : systèmes chaotiques. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor. Cependant, les travaux de certains scientifiques menés bien avant cette découverte vont être très utiles à la compréhension de la dynamique chaotique. En effet, vers la fin du XIX^e siècle le mathématicien, physicien et philosophe français Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. [6]

I.2.1. Théorie du chaos

Il n'est pas rare d'entendre quelqu'un qualifier une situation de chaotique. Cette qualification porte par nature l'idée que cette situation relève du désordre ou de la plus grande confusion. [7]

Il n'existe pas de définition rigoureuse du chaos mais par chaos, il faut admettre la notion de "phénomène imprévisible et erratique". Cependant, depuis une vingtaine d'années, on attribue le terme chaos à des "comportements erratiques qui sont liés à des systèmes simples pouvant être régis par un petit nombre de variables entre lesquelles les relations décrivant leur évolution peuvent être écrites. Ces systèmes sont donc déterministes bien qu'imprévisibles.

La théorie du chaos, déjà entrevue par Jacques Hadamard et Henri Poincaré, a été définie à partir des années 1960 par de nombreux scientifiques.

On appelle chaotiques des phénomènes complexes, dépendant de plusieurs paramètres et caractérisés par une extrême sensibilité aux conditions initiales.

Géométriquement, ces phénomènes dynamiques sont représentés dans un espace dont la dimension, qui peut être supérieure à celle de l'espace à trois dimensions, dépend du nombre de paramètres choisis pour les décrire. À chaque instant, l'état du phénomène est représenté

par un point dans cet espace appelé espace des phases. L'évolution du système est décrite par la trajectoire de ce point. [7]

I.2.2. Caractérisations du chaos

Il est très délicat de définir ce qu'est un système chaotique, étant donné qu'il n'existe pas une définition précise. En pratique, on peut dire qu'un système chaotique a un comportement borné en régime permanent qui ne correspond pas à un point d'équilibre, qu'il n'est ni périodique, ni quasi-périodique. Parmi les caractéristiques principales permettant d'évoquer un comportement chaotique. [4]

En général, les trajectoires d'un système dynamique chaotique sont attirées vers un attracteur étrange. Ce dernier est caractérisé par :

- a. un volume nul.
- b. une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches.
- c. une dimension souvent fractale (non entière) caractérisant le concept de système chaotique fractionnaire.

La naissance d'un attracteur étrange est liée à l'existence de deux processus, à savoir l'étirement, responsable de l'instabilité et de la sensibilité aux conditions initiales, et le repliement, responsable du côté étrange, fractal de l'attracteur.

En pratique, la vérification de quelques propriétés d'un système dynamique suffit pour pouvoir le considérer comme chaotique :

- vérifier la sensibilité aux conditions initiales.
- tracer les trajectoires des états et leur spectre de puissance.
- tracer différents attracteurs.
- tracer un diagramme de bifurcations.

I.2.3. Systèmes chaotiques

Un système dynamique est dit chaotique si une portion « significative » de son espace des phases présente simultanément les caractéristiques suivantes :

1. un système chaotique est un système déterministe.
2. il exhibe une extrême sensibilité aux conditions initiales.
3. il présente un comportement asymptotique apériodique.
4. une forte récurrence.

La présence de ces deux propriétés entraîne un comportement extrêmement désordonné qualifié à juste titre de « chaotique ». Les systèmes chaotiques s'opposent notamment aux systèmes intégrables de la mécanique classique, qui furent longtemps les symboles d'une régularité toute puissante en physique théorique.

I.3. Systèmes d'ordre fractionnaire

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19^{ème} siècle. Il a

été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.

On peut généraliser les opérateurs d'intégration et de différentiation en une seule opération fondamentale ${}_a D_t^q$ où a et t sont les limites de l'opération. L'opération intégral-différentiel continu est définie comme suit [8] et [9]:

$${}_a D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q} & q > 0 \\ 1 & q = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-q} & q < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

I.3.1. Opérations d'intégration et dérivation non-entiers

I.3.1.a Intégration non entière

Soit $q \in \mathbb{R}^+$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$. L'intégrale d'ordre q de borne inférieure t_0 définie par :

$${}_t I_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{q-1} f(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Est appelée intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville,

Avec $\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{q-1} dt$, La fonction Gamma d'Euler.

I.3.1.b. Dérivation non entière

I.3.1.b.1. Définition de Riemann-Liouville (R-L)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ avec $R(q) > 0$, n un entier positif $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction Localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$. La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par [] :

$${}_{t_0}^{RL} D_t^q f(t) \triangleq \frac{d^n}{dt^n} \left({}_{t_0} I_t^{(n-q)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-q-1} f(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

Avec $(n - q) < q < n$.

I.3.1.b.2. Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}_t^C D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{n-q+1}} d\tau \quad (1.4)$$

Avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n-1) < q < n$.

I.3.1.b.3. Définition de Grunwald-Letnikov (G-L)

Nous décrivons dans cette partie une méthode simple et efficace pour l'évaluation des dérivées fractionnaires. Pour le calcul numérique des dérivées d'ordre fractionnaire nous pouvons utiliser la relation (1.5) découle de la définition *Grünwald-Letnikov*. Cette approche est basée sur une approximation de la dérivée fractionnaire au sens de *Grünwald-Letnikov*. Nous pouvons ainsi utiliser cette approximation pour l'évaluation numérique des fonctions usuelles et des équations différentielles fractionnaires. La relation à l'approximation numérique explicite de $q^{\text{ème}}$ dérivée au point kh , ($k = 1, 2, \dots$) a la forme suivante [11] :

$$\left({}_{k-\frac{L_m}{h}}\right) D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}) \quad (1.5)$$

Où L_m est la "longueur de la mémoire", $t_k = kh$, h le pas de temps de calcul et $(-1)^j \binom{q}{j}$ sont les coefficients binomiaux $c_j^{(q)}$ ($j = 0, 1, \dots$). Le calcul des coefficients se fait par formule de récurrence suivante :

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)} \quad (1.6)$$

La solution numérique générale de l'équation différentielle fractionnaire.

$${}_a^L D_t^q y(t) = f(y(t), t),$$

Peut être exprimé comme

$$y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^{(q)} y(t_{k-j}) \quad (1.7)$$

Pour le terme de mémoire exprimée par la somme, un principe de "mémoire courte" peut être utilisé. Ensuite, l'index inférieur des sommes dans les relations (1.7) sera $v = 1$ pour $k < (L_m/h)$ et $v = k - (L_m/h)$ pour $k > (L_m/h)$, ou sans utiliser le principe de la "mémoire courte", nous mettons $v = 1$ pour tous k [8].

Cette méthode numérique est appelée développement en série entière d'une fonction génératrice. Cette approximation de la dérivée fractionnaire au sens de *Grünwald-Letnikov* est d'une part équivalente à la définition de *Riemman-Liouville* pour une large classe de fonctions [11], d'autre part, elle est bien adaptée à la définition de Caputo car elle ne nécessite que les conditions initiales et a clairement un sens physique.

I.3.2. Propriétés de l'opérateur ${}_a D_t^\alpha$

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [10] et [12] :

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire ${}_a D_z^\alpha f(z)$ est une fonction analytique.
2. Pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opération ${}_a D_z^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
3. Pour $\alpha = 0$ l'opération ${}_a D_z^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : ${}_a D_z^0 f(z) = f(z)$.
4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires ${}_a D_z^\alpha a f(z) + {}_a D_z^\alpha b g(z) = a {}_a D_z^\alpha f(z) + b {}_a D_z^\alpha g(z)$

I.4. Synchronisation

La synchronisation est un phénomène qui caractérise de nombreux systèmes non-linéaires. La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système. Rappelons qu'un système chaotique est un système déterministe, extrêmement sensible aux conditions initiales. Par conséquent, Typiquement, deux trajectoires issues de deux conditions initiales arbitrairement proches l'une de l'autre divergent exponentiellement avec le temps. Il s'ensuit que deux systèmes chaotiques ne peuvent synchroniser (sauf si les conditions initiales sont exactement les mêmes, ce qui est physiquement et numériquement impossible). A première vue, parler de synchronisation pour des systèmes chaotiques semble donc être surprenant, et on peut penser que le chaos est incontrôlable. Cependant, des recherches récentes ont montré que l'on pouvait synchroniser deux systèmes chaotiques en les couplant. Ce résultat s'applique dans plusieurs domaines, par exemple pour augmenter la puissance des lasers, synchroniser les sorties d'un circuit électrique, contrôler les oscillations de réactions chimiques, et coder les messages électroniques afin de sécuriser les communications.

I.5. Etude des exemples des systèmes chaotique fractionnaire

I.5.1. Système chaotique fractionnaire de Duffing-Holmes

L'oscillateur de Duffing, introduit en 1918 par G. Duffing, avec une rigidité linéaire négative, d'amortissement et d'excitation périodique est souvent écrit sous la forme [4] :

$$\ddot{x}(t) - x(t) + \alpha \dot{x}(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t) \quad (1.8)$$

Pour obtenir le système de Duffing d'ordre fractionnaire, l'équation (1.8) peut être réécrite sous la forme d'un système de premier ordre des équations différentielles autonomes sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{dt} &= y(t) \\ \frac{y(t)}{dt} &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ici, les dérivées conventionnelles dans les équations (1.9) sont remplacées par des dérivées fractionnaires des dérivées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= y(t) \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Où q_1, q_2 sont de deux ordres fractionnaires et α, δ et ω sont des paramètres du système. Une solution numérique du système de Duffing d'ordre fractionnaire (1.10), obtenu par à l'aide des relations (1.5) et (1.7), a la forme suivante

$$\begin{aligned} x(t_k) &= y(t_{k-1})h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}) \\ x(t_k) &= (x(t_k) - x^3(t_k) - \alpha y(t_{k-1}) + \delta \cos(\omega t_k))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} x(t_{k-j}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Où T_{sim} est le temps de simulation, $k=1,2,3,\dots,N$, pour $N=\lceil T_{sim}/h \rceil$, et $(x(0), y(0))$ est le point de départ (conditions initiales).

Dans la figure(I.1) est représenté la simulation du système chaotique Duffing d'ordre fractionnaire .

Pour les paramètres suivants $\alpha = 0.15$, $\delta = 0.3, \omega = 1$, avec les conditions initiales $(0.2, 0.2)$ pour le temps de simulation $T_{sim} = 190s$ et pas de temps $h = 0.005$, et l'ordres dérivés $q_1 = 0.9, q_2 = 0.98$.

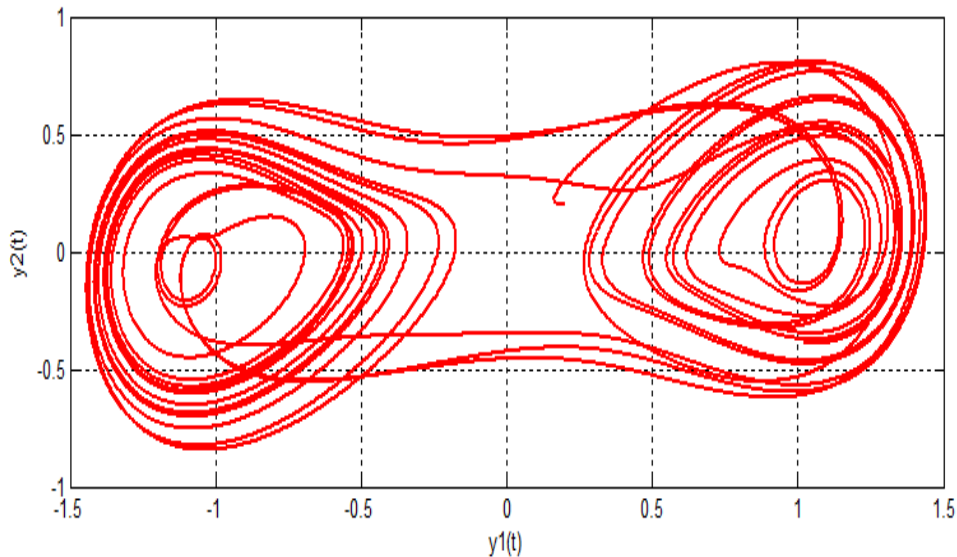


Fig. I.1 : Résolution numérique (trajectoire de phase) du système de Duffing d'ordre fractionnaire.

I.5.2.Système chaotique fractionnaire de Chen

Nous allons démontrer la solution numérique proposée sur l'ensemble de trois équations différentielles non linéaires fractionnaires, qui sont utilisées pour décrire le système de Chen. [13]

Le système de Chen d'ordre fractionnaire est décrit comme

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= a(y(t) - x(t)) \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t) \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - bz(t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

où q_1, q_2 et q_3 sont de deux ordres fractionnaires et a, b et c sont des paramètres du système. Une solution numérique du système de Duffing d'ordre fractionnaire, obtenu par à l'aide des relations (1.5) et (1.7), a la forme suivante

$$\begin{aligned}
x(t_k) &= a(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1}))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}) \\
y(t_k) &= ((c - a)x(t_k) - x(t_k)z(t_{k-1}) + y(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}) \\
z(t_k) &= (x(t_k)y(t_k) - bz(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)} z(t_{k-j})
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Où T_{sim} est le temps de simulation, $k=1,2,3,\dots,N$, pour $N=\lceil T_{sim}/h \rceil$, et $(x(0),y(0))$ est le point de départ (conditions initiales).

Le résultat de simulation de la réponse du système de Chen dans l'espace d'état pour les paramètres $a=35$, $b=3$, $c=28$, l'ordres $q_1=0.9$, $q_2=0.9$, $q_3=0.9$, et conditions initiales $(x(0),y(0),z(0))=(-9,-5,14)$, $T_{sim}=50s$ et $h=0.005$.

Dans la figure(I.2) est représenté la synchronisation du système chaotique Chen d'ordre fractionnaire.

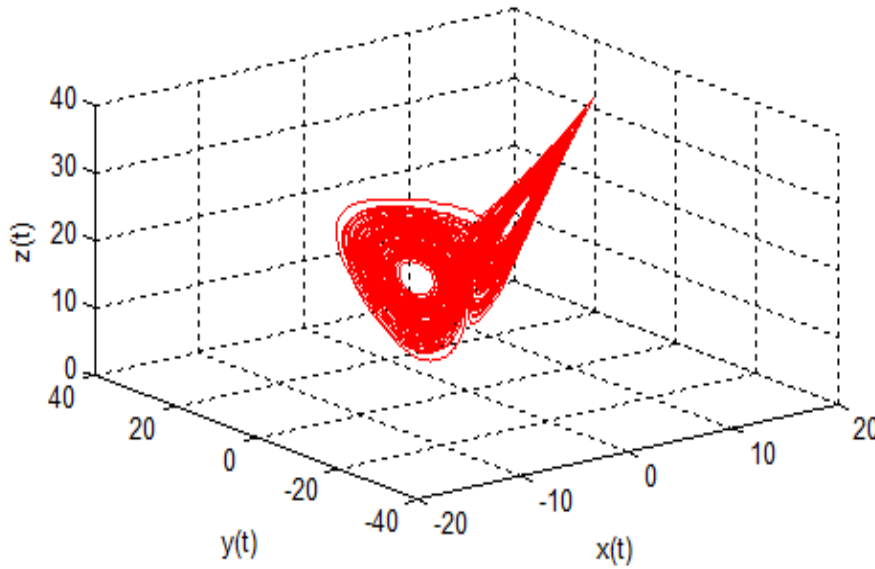


Fig. I.2 : Résolution numérique du système Chen d'ordre fractionnaire.

I.5. Commande adaptative : rappels et définitions

La commande adaptative est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en temps réel des régulateurs des boucles de commande afin de réaliser ou maintenir un certain niveau de performances quand les paramètres du procédé à commander sont soit inconnus soit variantes dans le temps. [1]

1.5.1. Concept de la commande adaptative

En général, le système à contrôler possède des paramètres incertains au début de l'opération de commande. Malgré que l'effet de cette incertitude paramétrique puisse disparaître en temps fini par un certain mécanisme d'ajustement, elle peut causer une instabilité du système.

Les systèmes de commande classique sont basés sur les modèles à paramètres fixes, car ils ne peuvent prendre en charge les variations lentes ou rapides de la dynamique des systèmes, d'où la nécessité d'introduire la notion de systèmes de commande adaptative afin d'assurer les performances désirées. Pour cela, les paramètres du régulateur (contrôleur) sont ajustés automatiquement sur la base des informations recueillies du système. [1]

1.5.2. Principe

En principe, un système de commande adaptative mesure un certain indice de performance du système à commander à partir de l'écart entre l'indice de performance désiré et l'indice de performance mesuré. Le mécanisme d'adaptation commande certains paramètres du système ajustable ou introduit un signal supplémentaire de commande. [1]

La figure (I.3) représente le principe général d'un système dans une plage donnée de commande adaptative.

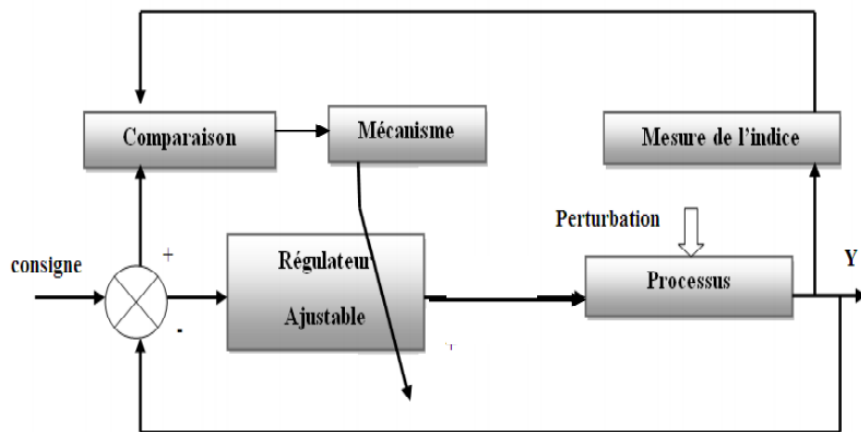


Fig. I.3 : Principe des systèmes de commande adaptative.

1.6. Commande adaptative floue

Le plus souvent, les régulateurs flous sont utilisés dans des systèmes qui possèdent des variations inconnues intrinsèques. L'objectif est donc de conserver de bonnes performances du système complet en adaptant le régulateur en fonction des variations du système.

La commande adaptative floue se compose donc d'un régulateur flou adaptatif (soit unique, soit choisi parmi un groupe de régulateur en fonction de ses performances).

La chose la plus importante qui différencie un régulateur adaptatif flou d'un régulateur adaptatif conventionnel est que le premier peut prendre en compte des informations linguistiques. Ceci qui est très important lorsque le système possède des incertitudes que l'opérateur humain a appris à anticiper. [1]

1.6.1. Commande adaptative floue directe (auto-ajustable)

La loi de commande est directement approximée par un ou plusieurs systèmes adaptatifs flous. [1]

La structure de cette commande est montrée sur la figure (I.4).

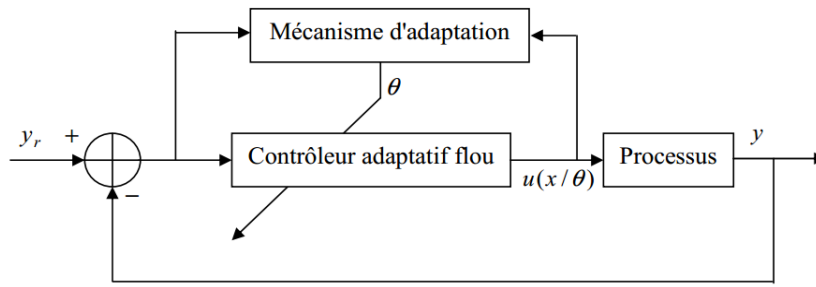


Fig. I.4 : Commande adaptative floue directe.

1.6.2. Commande adaptative floue indirecte (avec modèle de référence MIAC)

Dans cette méthode on approxime d'abord le modèle du processus par des systèmes adaptatifs flous puis on synthétise la loi de commande à partir du modèle approximé. [1]

La figure (I.5) montre la structure de la commande adaptative floue indirecte.

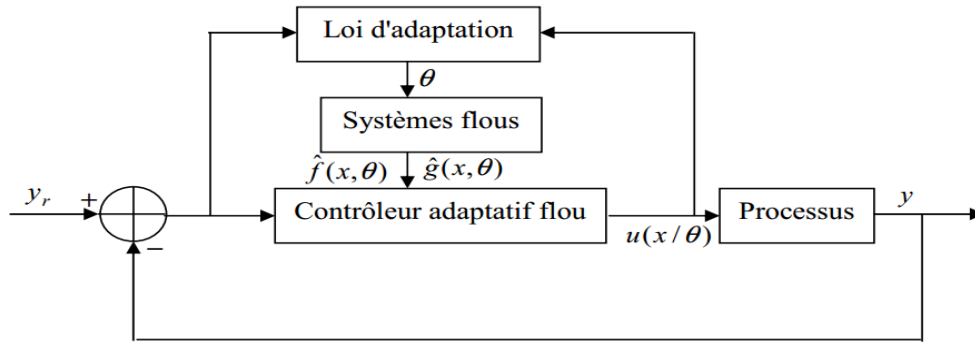


Fig. I.5 : Commande adaptative floue indirecte.

I.7. Commande par mode glissant (CMG)

L'objectif de la commande est de relier les trajectoires sur la surface de glissement afin d'écarter l'erreur et d'exiger la dynamique choisie. [1]

I.7.1. Définitions :

On verra que l'approche par mode glissant présente un vocabulaire particulier, nous commençons par exposer quelques définitions utiles. Les définitions concernent :

- la fonction de commutation.
- le régime glissant.
- la surface de glissement.

Définition 1 : fonction de commutation

la fonction de commutation est choisie comme une fonction linéaire de l'état [1] :

$$S(x) = [S_1(x) S_2(x) \dots S_n(x)]^T = Cx \quad , \quad C = [C_1 C_2 \dots C_m]^T \in R^{m \times n} \quad (1.14)$$

La structure de commande est caractérisée par le signe d'une fonction vectorielle $S(x)$ appelée fonction de commutation.

Définition 2: régime glissant

Si pour tout vecteur d'état initial $x(t_0) \in S$, la trajectoire d'état reste dans la surface s , $x(t_0) \in S \forall t > t_0$ alors $x(t)$ est un régime glissant pour le système. [1]

Définition 3: surface de glissement

Si tout point de S est défini tel qu'il existe des trajectoires d'état hors de S , alors le contenant de la surface de commutation S est appelé surface de glissement. [1]

I.7.2. Notions de bases

a. Régime glissant idéal

En théorie, l'organe de commutation est supposé insensible aux bruits, et la trajectoire en régime glissant est décrite parfaitement par l'équation $S(x) = 0$. Le régime glissant idéal correspond à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle du point représentatif de l'évolution du système qui glisse parfaitement sur la surface de commutation S . [1]

La figure (I.6) est représentée la régime glissant idéal.

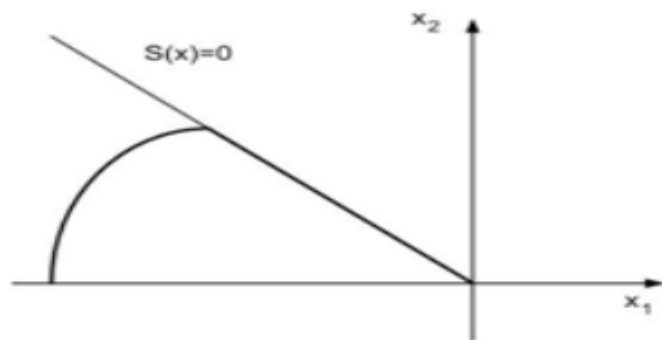


Fig. I.6 : Glissement idéal.

b. Régime glissant réel

En pratique l'organe de commutation est réalisé à partir de relais qui présentent des défauts comme les retards de commutations, dans ce cas la trajectoire d'état du régime glissant reste au voisinage de la surface de commutation donnant naissance à des oscillations indésirables qui réduisent la précision du système et non la stabilité. [1]

La figure (I.7) est représentée le régime glissant réel.

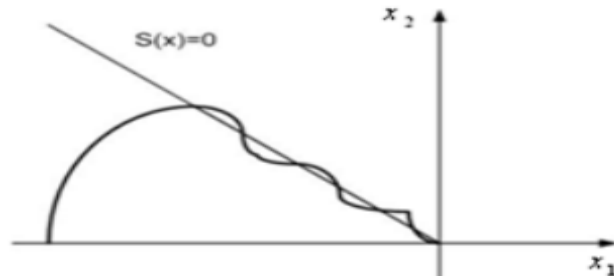


Fig. I.7 : Glissement réel.

I.7.3. Principe de la commande par mode glissant

Le principe de la commande par mode glissant est de forcer le système à arriver une surface donnée appelée surface de glissement en fonction des objectifs de commande, fixant la dynamique en boucle fermée : c'est le mode de convergence, puis par la synthèse d'une commande discontinue qui permet aux trajectoires du système à arriver et, ensuite, à rester sur cette surface : c'est le mode de glissement. [1]

La Figure(I.6) représentée les Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état.

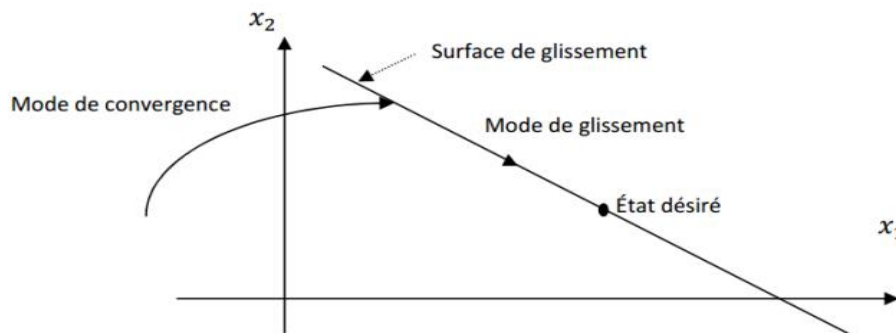


Fig. I.8 : Différents mode de convergence pour la trajectoire d'état.

La conception du commande par mode glissant passe par deux étapes essentielles [1]

- Déterminer le choix et le nombre des surfaces dessiner par un vecteur.
- Déterminer la loi de commande par une nouvelle entrée discontinue $u_n(x)$, pour attirer la trajectoire d'état vers la surface.

I.7.4. Conception de la commande par mode glissant

La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes principales très utiles l'une de l'autre. [1]

- Choix de la surface .
- L'établissement des conditions d'existence.
- Détermination de la loi de commande.

a. Choix de la surface de glissement

Une forme assez générale à est proposée par Slotine [14] pour déterminer la surface de glissement qui assure une convergence de la grandeur à régler vers sa valeur de référence, elle est donnée par [1] :

$$S(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{r-1} e(t) \quad (1.15)$$

Avec :

$e(t)$: Écart entre la variable à régler et sa référence.

λ : Constante positive choisie par le concepteur.

r : Degré relatif, (nombre de fois qu'il faut dériver la surface pour faire apparaître la commande).

b. Détermination de la loi de commande

La loi de commande par mode glissant comprend en général deux termes, la commande équivalente et la commande discontinue de commutation. [1]

La structure d'un contrôleur par mode de glissement est constituée de deux parties, une concernant la linéarisation exacte u_{eq} et l'autre stabilisante u_c .

$$u = u_{eq} + u_c \quad (1.16)$$

➤ La commande équivalente correspond à la commande du système nominal

($w(x, t) = 0$) permettant de satisfaire la condition $\dot{S}(x, t) = 0$.

On a en effet :

$$\frac{\partial S}{\partial x} [f(x, t) + g(x, t)u_{eq}(t)] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

$$u_{eq}(t) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} g(x, t) \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right) \quad (1.18)$$

avec la condition d'existence :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} g(x, t) \right)^{-1} \neq 0 \quad (1.19)$$

➤ La commande discontinue où de commutation permettant de garantir la condition d'attractivité et responsable du glissement la plus simple.

$$u_c = -k \text{sign}(S(x)) \quad (1.20)$$

k : est une constante positive qui représente le gain de la commande discontinue.

Avec La condition d'attractivité :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial S}{\partial x} (f + gu^+) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial S}{\partial x} (f + gu^-) > 0 \quad (1.21)$$

I.8. Stabilité : Outils et Rappels**I.8.1. Stabilité de Lyapunov [15]**

Définition 1 : Un point d'équilibre $x = 0$ d'un système $\dot{x} = f(x)$ est dit stable si :

$$\forall R > 0, \exists r > 0 : (\|x(0)\| \leq r \implies \|x(t)\| \leq R \quad \forall t > 0)$$

La stabilité implique que la trajectoire peut être gardée proche de l'origine en initialisant suffisamment proche de lui.

Définition 2 : (Stabilité asymptotique) La stabilité asymptotique implique que le point d'équilibre est stable, et en plus, en initialisant le système suffisamment proche de l'origine, l'état du système converge vers zéros quand le temps t tend vers l'infini.

Définition 3 : (Fonction de Lyapunov) Une fonction $V(x)$ associée au système $\dot{x} = f(x)$ est dite de Lyapunov si elle vérifie les conditions suivantes

➤ $V(x)$ est définie positive ($V(x) > 0$).

- Les dérivées partielles de $V(x)$ suivant les états x_i sont continues.
- Sa dérivée par rapport au temps est semi-défini négative ($\dot{V}(x) \leq 0$).

Définition 4 : Un point d'équilibre $x = 0$ est stable s'il existe une fonction scalaire $V(x)$ à dérivées partielles continues tel que

- $V(x)$ est défini positive.
- $\dot{V}(x)$ est semi défini négatif.

c.à.d. Le point d'équilibre est stable si on peut trouver une fonction de Lyapunov associée au système.

1.8.2. Théorème de Kalman –Yakubovitch [5]

Soit le système : $\dot{x} = Ax$: $x \in \mathbb{R}^n$
avec A Matrice d'Hurwitz, c.à.d toute les valeurs propres de A ayant une partie réelle négative.
Il existe deux matrices symétriques définies positives P et Q vérifiant l'équation matricielle de Lyapunov

$$A^T P + PA = -Q$$

1.8.3. Lemme de Barbalat [15]

Lemme 1 : Si $\dot{f} \in L_\infty$, et $f \in L_p$, pour $p \in [1, \infty[$, alors $f \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow \infty$

Le résultat du lemme 1.1 est un cas spécial d'un résultat plus général donné par le lemme de Barbalat indiqué ci-dessous.

Lemme 2 : Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ existe et finie, et $f(t)$ est une fonction uniformément continue.

alors $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

1.8.4. Fonction de Nussbaum [15]

Pour estimer la direction de la commande (i.e. le signe de la matrice des gains de commande), on utilisant la technique de Nussbaum.

La fonction $N(\zeta)$ est dite une fonction de Nussbaum, si elle a les propriétés utiles suivantes :

1. $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\zeta) d\zeta = +\infty$
2. $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\zeta) d\zeta = -\infty$

Exemple : Les fonctions suivantes sont des fonctions de Nussbaum,

$$N_1(\zeta) = \zeta^2 \cos(\zeta),$$

$$N_2(\zeta) = \zeta \cos(\sqrt{|\zeta|}),$$

$$N_3(\zeta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta\right) e^{\zeta^2},$$

$$N_4(\zeta) = \ln(\zeta + 1) \cos(\sqrt{\ln(\zeta + 1)}),$$

est très facile de montrer que $N_1(\zeta)$, $N_2(\zeta)$, $N_3(\zeta)$ et $N_4(\zeta)$ satisfont les deux propriétés précédentes.

soit la fonction continue $N_1(\zeta) = \zeta^2 \cos(\zeta)$, il est claire que $N_1(\zeta)$ est positive sur l'intervalle $(2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2})$ et négative sur l'intervalle $(2n\pi + \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$, n 'est entier.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} N_1(\zeta) d\zeta = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}} N_1(\zeta) d\zeta = -\infty,$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} N_1(\zeta) d\zeta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \zeta^2 \cos(\zeta) d\zeta \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \left(\zeta^2 \sin(\zeta) - 2 \int_0^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \zeta \sin(\zeta) d\zeta \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi + \pi) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi + \pi/4} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}} N_1(\zeta) d\zeta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}} \zeta^2 \cos(\zeta) d\zeta \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}} \left(\zeta^2 \sin(\zeta) - 2 \int_0^{2\pi n + 3\frac{\pi}{2}} \zeta \sin(\zeta) d\zeta \right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Le lemme suivant sera utilisé dans l'analyse de la stabilité.

Lemme 1: Soit $V(t), \zeta(t)$ des fonctions continues définies sur $[0, t_f)$ avec $V(t) > 0, \forall t \in [0, t_f)$, et $N(\zeta)$ est une fonction de Nussbaum. Si l'inégalité suivante est valide [15] :

$$V(t) \leq c_0 + e^{-c_1 t} \int_0^t g(x(\tau)) N(\zeta) \dot{\zeta} e^{-c_1 \tau} d\tau + e^{-c_1 t} \int_0^t \dot{\zeta} e^{-c_1 \tau} d\tau$$

où c_0 représente une constante convenable, c_1 est une constante positive, et $g(x(\tau))$ est un paramètre variable dans le temps qui prend des valeurs dans l'intervalle inconnu fermé $I = [l^-, l^+]$ avec $0 \notin I$, alors $V(t), \zeta(t) \int_0^t g(x(\tau)) N(\zeta) \dot{\zeta} e^{-c_1 \tau} d\tau$, doivent être bornés sur $[0, t_f)$.

La technique de Nussbaum sera utilisée dans les futures chapitres, pour estimer la direction de la commande (i.e. le signe de gain de commande).

I.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les systèmes chaotiques et la caractérisation du chaos en générale, et on parle sur la synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système. Nous avons présenté l'état de l'art sur les systèmes d'ordre fractionnaire (Opérations d'intégration et dérivation non-entiers), et quelques rappels sur les commandes adaptatives floues, la commande par mode glissant et des outils pour l'analyse de stabilité.